# Задача 9.1

Расшифровать теорему Каруша-Куна-Такера для ОзЛП.

ОзЛП: $\max\_{Ax\leq b}(c,x)=\min\_{\genfrac{}{}{0pt}{}{λA=c}{λ\geq 0}}(λ,b)$.

## Теорема Каруша-Куна-Такера (далее ТККТ)

Пусть в задаче математического программирования с регулярным множеством $X$:

* функции $f$,$g\_{i}$ выпуклы на $R^{n}$;
* $f,g\_{i}\in C\_{1}\left(R^{n}\right)$;
* $X\ne ∅$;
* $X$ регулярно $∀x\in X$;

Тогда $x^{0}$ — точка минимума $b$ в задаче математического программирования с регулярным множеством $X$ $⇔∃λ\geq 0$.

Решение

## 1 шаг

$$d=\max\_{\genfrac{}{}{0pt}{}{Ax\leq b}{x\in R^{n}}}(c,x)=-\min\_{\genfrac{}{}{0pt}{}{Ax\leq b}{x\in R^{n}}}\left(-c,x\right)=-\min\_{x\in X}f\left(x\right),$$

где

$$f\left(x\right)=\left(-c,x\right)=-\sum\_{i=1}^{n}c\_{i}x\_{i},$$

$$X=\left\{x\in R^{n}:g\_{i}\left(x\right)\leq 0 ∀i=\overbar{1,m}\right\},$$

$$g\_{i}\left(x\right)=\sum\_{i=1}^{n}\left(a\_{ij}x\_{i}-b\_{i}\right)=\left(a\_{i},x\right)-b\_{i},$$

где $a\_{i}$ — это $i$-ая строка.

## 2 шаг

Пусть $x^{0}$ — решение $d=\max\_{\genfrac{}{}{0pt}{}{Ax\leq b}{x\in R^{n}}}(c,x)=-\min\_{x\in X}f\left(x\right)$. Тогда согласно ТККТ это равносильно:

$$∃λ\in R^{n}\geq 0$$

$$\left\{\begin{array}{c}grad\_{x}L\left(x^{0},λ\right)=0\\\sum\_{i=1}^{m}λ\_{i}g\_{i}(x^{0})=0\end{array}\right.$$

## 3 шаг

Распишем последние соотношения подробнее:

$$L\left(x,λ\right)=-\left(c,x\right)+\sum\_{i=1}^{m}λ\_{i}g\_{i}\left(x\right)=-\left(c,x\right)+\sum\_{i=1}^{m}λ\_{i}((a\_{i},x)-b\_{i})=-(c,x)+\sum\_{i=1}^{m}λ\_{i}(a\_{i},x)-\sum\_{i=1}^{m}λb\_{i}=-(c,x)+\sum\_{i=1}^{m}λ\_{i}\sum\_{j=1}^{n}a\_{ij}x\_{j}-(b,λ) =-(c,x)+\sum\_{i=1}^{m}\sum\_{j=1}^{n}λ\_{i}a\_{ij}x\_{j}-(b,λ)=-(c,x)+\sum\_{j=1}^{n}\sum\_{i=1}^{m}λ\_{i}a\_{ij}x\_{j}-(b,λ)=-(c,x)+\sum\_{j=1}^{n}x\_{j}\sum\_{i=1}^{m}λ\_{i}a\_{ij}-(b,λ)=-(c,x)+\sum\_{j=1}^{n}x\_{j}\left(λA\right)\_{j}-(b,λ)=-(c,x)+(λA,x)-(b,λ)=(λA-c,x)-(b,λ)$$

Тогда:

$$L\left(x^{0},λ\right)=grad\_{x}\left(\left(λA-c,x\right)-\left(b,λ\right)\right)=λA-c=0⟹λA=c$$

$$\left(λ,g\left(x^{0}\right)\right)=-\left(b,λ\right)+\left(λA,x^{0}\right)=0⟹\left(λA,x^{0}\right)=(b,λ)$$

Итак, $x^{0}$ — точка $\max\_{\genfrac{}{}{0pt}{}{Ax\leq b}{x\in R^{n}}}(c,x)$ тогда и только тогда, когда $∃λ\in R^{n}\geq 0: λA=c и (λA,x^{0})=(b,λ)$.

# Задача 9.2

Показать, что $λ$ — решение двойственной задачи ЛП.

# Решение

## Шаг 1

Запишем ТККТ для двойственной задачи к ОзЛП: $d^{\*}=\min\_{\genfrac{}{}{0pt}{}{y\in R^{m}}{yA=c,y\geq \overbar{0}}}(b,y)$.

$$\left\{\begin{array}{c}yA=c\\y\geq \overbar{0}\end{array}\right.⟺\left\{\begin{array}{c}yA-c\leq 0\\-yA+c\leq 0\\-y\leq 0\end{array}\right.$$

Пусть

$$f\left(y\right)=\left(b,y\right)$$

$$g\_{i}\left(y\right)=y\_{i}, i=\overbar{1,m}$$

$$g\_{m+i}\left(y\right)=\left(y,A^{i}\right)-c\_{i}, i=\overbar{1,n}$$

$$g\_{m+n+i}\left(y\right)=-\left(y,A^{i}\right)+c\_{i},i=\overbar{1,n},$$

где $A^{i}$ — это $i$-ый столбец матрицы $A$.

$y^{\*}$— точка $\min\_{\genfrac{}{}{0pt}{}{y\in R^{m}}{yA=c, y\geq \overbar{0}}}(b,y)⟺∃λ\in R^{m+2n}, λ\geq 0:grad\_{y}L\left(y^{\*},λ\right)=0 и \left(λ^{'},g\left(y^{\*}\right)\right)=0$.

$$L\left(y,λ^{'}\right)=\left(b,y\right)+\sum\_{i=1}^{m+2n}λ\_{i}g\_{i}(y)=\left(b,y\right)-\sum\_{i=1}^{m}λ\_{i}y\_{i}+\sum\_{i=1}^{n}\left(\left(y,A^{i}\right)-c\_{i}\right)λ\_{i+m}+\sum\_{i=1}^{n}\left(-\left(y,A^{i}\right)-c\_{i}\right)λ\_{i+m+n}=(\*)$$

Переобозначим:

$$λ=\left(λ\_{1}, λ\_{2},λ\_{3}\right),λ\_{1}\in R^{m}, λ\_{2},λ\_{3}\in R^{n}$$

Тогда

$$\left(\*\right)=\left(b,y\right)-\left(λ\_{1},y\right)+\left(Aλ\_{2},y\right)-\left(c,λ\_{2}\right)-\left(Aλ\_{3},y\right)+\left(c,λ\_{3}\right)=\left(c,λ\_{3}-λ\_{2}\right)+(b-λ\_{1}-A\left(λ\_{3}-λ\_{2}\right),y)$$

$$grad\_{y}L\left(y^{\*},λ\right)=b-λ\_{1}-A\left(λ\_{3}-λ\_{2}\right)=0$$

$$\left(λ,g\left(y^{\*}\right)\right)=\left(c,λ\_{3}-λ\_{2}\right)+\left(-λ\_{1}-A\left(λ\_{3}-λ\_{2}\right),y^{\*}\right)=0⟺\left(c,λ\_{3}-λ\_{2}\right)=\left(λ\_{1}+A\left(λ\_{3}-λ\_{2}\right),y^{\*}\right)$$

Итак, $y^{\*}$ является точкой $\min\_{\genfrac{}{}{0pt}{}{y\in R^{m}}{yA=c,y\geq \overbar{0}}}(b,y)$ тогда и только тогда, когда $∃λ\_{1}\in R^{m}, λ\_{2},λ\_{3}\in R^{n}, λ\_{1}, λ\_{2},λ\_{3}\geq 0: b-λ\_{1}-A\left(λ\_{3}-λ\_{2}\right)=0 и \left(c,λ\_{3}-λ\_{2}\right)=\left(λ\_{1}+A\left(λ\_{3}-λ\_{2}\right),y^{\*}\right)$, или, переобозначая:

$$∃λ\_{1}\in R^{m}, \overbar{λ}\in R^{n}, λ\_{1},\overbar{λ}\geq 0: b-λ\_{1}-Aλ ̅=0 и \left(c,\overbar{λ}\right)=\left(λ\_{1}+A\overbar{λ},y^{\*}\right)$$

## Шаг 2

Покажем, что если:

* $∃x^{0}\in R^{n}:Ax^{0}\leq b$
* $∃λ\in R^{m},λ\geq \overbar{0}:λA=c,\left(λA,x^{0}\right)=(b,λ)$

то $∃y^{\*},λ\_{1}\in R^{m}, \overbar{λ}\in R^{n}, λ\_{1},\overbar{λ}\geq 0: -b+λ\_{1}+Aλ ̅=0 и \left(c,\overbar{λ}\right)=\left(λ\_{1}+A\overbar{λ},y^{\*}\right) $

Переобозначим: $λ≡y^{\*}$

Имеем: $∃x^{0}: Ax^{0}\leq b и ∃y^{\*}\in R^{m},y^{\*}\geq \overbar{0}: \left\{\begin{array}{c}y^{\*}A=c\\\left(y^{\*}A,x^{0}\right)=(b,y^{\*})\end{array}\right.$

Из $∃x^{0}\in R^{n}:Ax^{0}\leq b$ получаем, что $∃\overbar{λ}\in R^{n}, \overbar{λ}=x^{0}: A\overbar{λ}-b\leq 0⟹∃λ\_{1}\in R^{m}, λ\_{1}\geq 0: A\overbar{λ}-b+λ\_{1}=0⟹b=A\overbar{λ}+λ\_{1}$.

Из этого следует, что, переобозначая $x^{0}=\overbar{λ}$: $∃y^{\*}\in R^{m},y^{\*}\geq \overbar{0}:\left(c,\overbar{λ}\right)=(b,y^{\*})$.

Итак, получим: $∃y^{\*}\in R^{m},y^{\*}\geq \overbar{0} и ∃λ\_{1}\in R^{m}, λ\_{1}\geq 0, ∃\overbar{λ}\in R^{n}: b=A\overbar{λ}+λ\_{1} и \left(c,\overbar{λ}\right)=(b,y^{\*})$.

Таким образом, доказано, что если задача ЛП разрешима, то разрешима и двойственная к ней, и в случае разрешимости значения этих задач совпадают:

$$\max\_{\genfrac{}{}{0pt}{}{Ax\leq b}{x\in R^{n}}}(c,x)=\left(c,x^{0}\right)=\left(b,y^{\*}\right)=\min\_{\genfrac{}{}{0pt}{}{y\in R^{m}}{yA=c,y\geq \overbar{0}}}(b,y),$$

что и требовалось доказать (в силу того, что двойственная к двойственной задаче ЛП совпадает с прямой задачей ЛП).